**DST Mathématiques**

**Durée : 1 h 45**

*Présentation et orthographe seront pris en compte dans le barème de notation.*

*Les calculatrices graphiques sont autorisées pour ce sujet.*

**EXERCICE 1 :** *7 points*

***Partie A* : Résolution de l’équation différentielle (E) :**

On considère l’équation différentielle , où *y* est une fonction de la variable réelle *x*, définie et dérivable sur [-10 ; 10] , et y ’ la fonction dérivée de la fonction *y*.

1. Déterminer les solutions sur [ -10 ; 10] de l’équation différentielle
2. Démontrer que la fonction définie sur [-10 ; 10] par est une solution particulière de l’équation différentielle (*E*).
3. En déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (*E*).
4. Déterminer la solution de l’équation différentielle (*E*) qui vérifie la condition  (0) = 0.

***Partie B* : étude de la fonction**

Soit la fonction définie sur [-10 ; 10] par .

1. On désigne par ’ la fonction dérivée de la fonctionsur [-10 ; 10]. Déterminer.
2. Etudier le signe desur [-10 ; 10]. En déduire les variations de  sur cet intervalle et dresser son tableau de variations. On précisera les valeurs remarquables de  et
3. Déterminer une primitive F de la fonction  sur [-10 ; 10]. En déduire ainsi que la valeur moyenne de la fonction  sur [0 ; 10 ]

**EXERCICE 2 :** *13 points*

**A. Probabilités conditionnelles**

À la suite d’une campagne de vaccination lancée par l’Organisation Mondiale de la Santé (OMS) pour lutter contre une pandémie, on estime que, dans une population donnée, il ne reste plus que 1% de personnes non vaccinées. D’après une étude, on estime également que 95% des personnes vaccinées sont immunisées contre le virus de la pandémie et que 20% des personnes non vaccinées sont naturellement immunisées contre ce virus.

On choisit au hasard une personne dans la population concernée.

On note A l’évènement : « la personne choisie est vaccinée », et B l’évènement : « la personne choisie est immunisée contre le virus ».

1. Calculer les probabilités suivantes : et .
2. Montrer que la probabilité que la personne choisie soit immunisée contre le virus est égale à 0,9425.
3. Calculer la probabilité que la personne choisie ait été vaccinée sachant qu’elle est immunisée contre le virus. Arrondir au millième.

**B. Loi binomiale et approximation d’une loi binomiale par une loi de Poisson**

On admet que 99 % des personnes d’une population donnée ont été vacciné.

On prélève au hasard 400 personnes de cette population. L’effectif de la population est assez important pour que l’on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 400 personnes. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 400 personnes, associe le nombre de personnes de ce prélèvement n’ayant pas été vaccinées.

On admet que la variable X suit une loi binomiale de paramètres 400 et

1. Déterminer la valeur du second paramètre de la loi binomiale suivie par X.
2. Calculer la probabilité qu’un prélèvement de 400 personnes contienne au plus une personne non vaccinée et la probabilité qu’il y ait entre 3 et 10 personnes non vaccinées par prélèvement. Arrondir au millième.
3. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson.
4. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
5. On désigne par X1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ a la valeur obtenue au a. Calculer une valeur approchée de P (X1 > 5) arrondie au millième. Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l’exercice.

**C. Approximation d’une loi binomiale par une loi normale**

On estime que 20% des personnes non vaccinées sont naturellement immunisées contre le virus.

Parmi les personnes non vaccinées, on prélève au hasard 200 personnes.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 200 personnes parmi les personnes non vaccinées, associe le nombre de personnes de ce prélèvement qui ne sont pas immunisées contre le virus. On admet que Y suit la loi binomiale de paramètres 200 et 0,8.

1. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi normale. Montrer que les paramètres de cette loi normale sont : m = 160 et σ ≈ 5,66 (valeur de σ arrondie au centième).
2. On désigne par Y1 une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne m = 160 et d’écart-type σ = 5,66. On souhaite calculer la probabilité qu’il y ait, dans un prélèvement de 200 personnes, entre 155 et 165 personnes non immunisées contre le virus en utilisant la loi de Y1 et en arrondissant le résultat au millième.
3. **Intervalle de confiance**

Le vaccin préconisé dans la lutte contre la pandémie est conditionné dans des flacons.

L’OMS souhaite connaître le poids moyen des flacons de vaccin afin d’estimer le poids de leur expédition en grand nombre.

Pour cela, l’OMS prélève un échantillon de 150 flacons et constate que, sur un tel échantillon, le poids moyen est 10 g avec un écart-type  0.5 g.

1. Donner une estimation de l’écart-type de l’ensemble des flacons (à 10 -3)
2. Déterminer un intervalle de confiance du poids moyen au risque de 1 %

**EXERCICE 3 :** *5 points*

Un magasin spécialisé dans la vente de produits frais non stockables s’approvisionne quotidiennement auprès de deux grossistes

On s’intéresse à la vente d’articles d’un même type parmi l’ensemble des produits frais proposés.

Le nombre d’articles de ce type vendus par jour peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale de moyenne 40 et d’écart type 10. Le magasin réalise sur la vente de chaque article un bénéfice de 3 euros.

1. Quelle quantité d’articles de ce type doit-on vendre un jour donné pour réaliser un bénéfice de 150 euros ?
2. Calculer la probabilité que le bénéfice journalier sur la vente des articles de ce type soit au moins égal à 150 euros.
3. Calculer la probabilité que le bénéfice journalier sur la vente des articles de ce type soit compris entre 90 et 150 euros.
4. Si la quantité d’articles de ce type en stock en début de journée est de 55 unités, quelle est la probabilité que le magasin ne soit pas en rupture de stock sur cet article un jour donné.
5. De quelle quantité d’articles de ce type doit-on disposer en début de journée pour que la probabilité de rupture de stock avant la fin de la journée soit inférieure à 0,025?